

# Điều khiển trượt dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến tính áp dụng cho hệ bóng và thanh

Phó Hoàng Linh và Huỳnh Minh Vũ\*

Trường Đại học Kỹ thuật – Công nghệ Cần Thơ

## TÓM TẮT

Bài báo trình bày việc áp dụng bộ điều khiển trượt được xây dựng dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến tính nhằm mục đích điều khiển hệ thống bóng và thanh trục giữa, hệ thống này thường được dùng làm đối tượng để kiểm chứng các giải thuật trong kỹ thuật điều khiển. Điều khiển trượt là kỹ thuật được sử dụng phổ biến để điều khiển ổn định các hệ thống có tính phi tuyến và có tính không ổn định cao như hệ bóng và thanh. Thiết kế bộ điều khiển dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến tính rất phù hợp để xử lý các yếu tố không chắc chắn của hệ thống, so với các phương pháp điều khiển phi tuyến khác thì phương pháp thiết kế này có hiệu quả hơn về mặt tính toán và thực hiện đơn giản hơn. Kết quả mô phỏng điều khiển cho thấy bộ điều khiển được đề xuất có khả năng đáp ứng nhanh, cân bằng tốt, đáp ứng các chỉ tiêu chất lượng điều khiển. Ngoài ra, bộ điều khiển còn được kiểm chứng khi hệ thống có nhiễu tác động.

**Từ khóa:** điều khiển trượt, bất đẳng thức, ma trận tuyến tính, bóng và thanh

## 1. GIỚI THIỆU

Hệ thống bóng và thanh một hệ thống có tính phi tuyến cao và không ổn định [1, 2], hệ này được sử dụng phổ biến trong kỹ thuật điều khiển để kiểm nghiệm các giải thuật điều khiển khác nhau, hệ có cấu tạo vật lý khá đơn giản nhưng tương đối phức tạp về mặt động lực học. Nó có độ bất ổn định cao và là cơ sở để tạo ra các hệ thống tự cân bằng như: hệ thống phóng tên lửa, cân bằng máy bay theo phương ngang, xe tự hành...[3]. Bộ điều khiển có nhiệm vụ kiểm soát góc nghiêng của thanh để giữ quả bóng cân bằng tại vị trí mong muốn. Tuy nhiên, dưới tác động của trọng lực, với một góc nghiêng nhỏ của thanh, quả bóng sẽ lăn nhanh nên rất khó giữ đúng tại vị trí cân bằng[4].

Điều khiển ổn định hệ bóng và thanh đã thu hút được sự quan tâm của các nhà khoa học trong và ngoài nước. Nghiên cứu của Trần Nguyễn Đăng Khoa và cộng sự [5] đã áp dụng thuật toán điều khiển LQR (Linear Quadratic Regulator) cho hệ bóng và thanh trục giữa, kết quả được kiểm chứng bằng mô phỏng với các ma trận Q và R khác nhau, kết quả cho thấy điều khiển LQR có khả năng điều khiển ổn định hệ bóng và thanh trục giữa. Kết hợp giữa bộ điều khiển PID (Proportional Integral

Derivative) và điều khiển mờ để điều khiển ổn định hệ bóng và thanh đã được Nguyễn Tiến Diệm và Đặng Xuân Kiên trong nghiên cứu [6] và kết quả cho thấy bộ điều khiển được đề xuất có khả năng điều khiển tốt hơn so với bộ điều khiển PID kinh điển. Tối ưu hóa điều khiển LQR bằng giải thuật di truyền áp dụng điều khiển hệ bóng và thanh đã được thực hiện trong nghiên cứu [7] của Gutierrez và cộng sự. Bên cạnh đó, nghiên cứu của nhóm tác giả Albagul và cộng sự đã điều khiển ổn định hệ bóng và thanh bằng bộ điều khiển PID, với các thông số của bộ điều khiển được xác định dựa trên giải thuật bầy đàn (PSO - Particle Swarm Optimization) [8] và việc xác định thông số của bộ điều khiển PID dựa trên giải thuật di truyền (GA - Genetic Algorithm) cũng được thực hiện trong [9], các kết quả mô phỏng cho thấy phương pháp tối ưu bộ điều khiển PID dựa trên giải thuật bầy đàn và giải thuật di truyền có các tiêu chí chất lượng điều khiển như độ vọt lố, thời gian tăng và thời gian tăng tốt hơn so với phương pháp thử và sai.

Dựa trên những kết quả nghiên cứu trên, bài báo này đề xuất một phương pháp xây dựng bộ điều khiển trượt dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến

Tác giả liên hệ: Huỳnh Minh Vũ

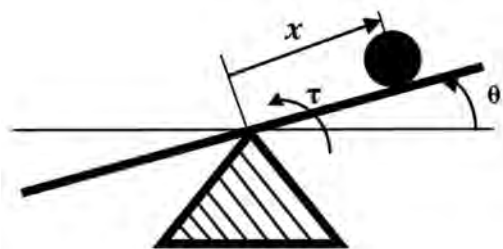
Email: [hmvu@ctu.edu.vn](mailto:hmvu@ctu.edu.vn)

tính (SMC-LMI) và đánh giá chất lượng điều khiển được thực hiện trên mô phỏng điều khiển hệ bóng và thanh khi có nhiễu tác động.

Bài báo được tổ chức gồm bốn phần: Giới thiệu là phần 1, mô hình toán đối tượng điều khiển được trình bày ở phần 2, phần 3 trình bày phương pháp thiết kế bộ điều khiển được đề xuất và kết luận là nội dung của phần 4.

**2. MÔ HÌNH TOÁN HỌC HỆ BÓNG VÀ THANH**

Khảo sát hệ bóng và thanh trục giữa, được trình bày như Hình 1.



Hình 1. Cấu trúc hệ bóng và thanh [10]

Dựa trên phân tích Lagrange, phương trình động lực học của hệ bóng và thanh trục giữa được thiết lập như (1)[11].

$$\begin{cases} \left(m + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} + mg \sin \theta - m\dot{\theta}^2 x = 0 \\ \left(J_B + mx^2\right)\ddot{\theta} + 2mxx\dot{\theta} + mgx \cos \theta = u \end{cases} \quad (1)$$

Mục tiêu chính là kiểm soát vị trí của quả bóng (x) và góc của thanh (θ) đến các giá trị mong muốn, dưới tác động của moment xoắn (u). Giả sử rằng hệ không xuất hiện ma sát, khối lượng của quả bóng và khối lượng của thanh đều phân bố đều. Vị trí bóng (x) được đo từ tâm của thanh và giá trị này là dương nếu quả bóng ở phía bên phải của tâm. Nếu thanh quay ngược chiều kim đồng hồ so với phương ngang thì góc (θ) là dương. Tương tự, moment xoắn ngược chiều kim đồng hồ tác dụng lên tâm của thanh được coi là dương.

**Bảng 1.** Thông số mô phỏng hệ bóng và thanh

Kí hiệu	Ý nghĩa	Giá trị	Đơn vị
<i>m</i>	Khối lượng quả bóng	0.1	kg
<i>R</i>	Bán kính của quả bóng	0.015	m
<i>J</i>	Moment quán tính của bóng	10 <sup>-5</sup>	kg.m <sup>2</sup>
<i>J<sub>B</sub></i>	Moment quán tính thanh	0.05	kg.m <sup>2</sup>
<i>g</i>	Gia tốc trọng trường	9.81	m/s <sup>2</sup>
<i>u</i>	Moment xoắn tác động vào tâm thanh	-	kg.m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
<i>x</i>	Vị trí của bóng	-	m
<i>θ</i>	Góc của thanh so với phương ngang	-	rad

Đặt biến trạng thái:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = \theta \quad \text{và} \quad x_4 = \dot{\theta}$$

Phương trình (1) có thể biểu diễn dưới dạng phương trình trạng thái như (2).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(\ddot{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\ddot{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f(\ddot{x})}{\partial x_3} & \frac{\partial f(\ddot{x})}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial f(\ddot{\theta})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\ddot{\theta})}{\partial x_2} & \frac{\partial f(\ddot{\theta})}{\partial x_3} & \frac{\partial f(\ddot{\theta})}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f(\ddot{\theta})}{\partial u} \end{bmatrix}$$

Bằng cách thay điểm cân bằng tại x = 0 và các thông số như Bảng 1, ta được các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.79 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -19.62 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

### 3. ĐIỀU KHIỂN TRƯỢT DỰA TRÊN BẤT ĐẲNG THỨC MA TRẬN TUYẾN TÍNH

#### 3.1. Thiết kế bộ điều khiển

Trong phần này, bộ điều khiển trượt dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến tính [12]-[13] sẽ được thiết kế để điều khiển ổn định vị trí quả bóng quanh vị trí cân bằng.

Phương trình(2) khi có nhiễu được viết lại như (3).

$$\dot{x} = Ax + B(u + f(t)) \quad (3)$$

Với  $|f(t)| \leq \delta_f$ ,  $\delta_f$  là hằng số dương.

Chọn mặt trượt như công thức (4).

$$s = B^T Px \quad (4)$$

với  $P$  là ma trận xác định dương có kích thước  $4 \times 4$ . Luật điều khiển được thiết kế như (5).

$$u(t) = u_{eq} + u_n \quad (5)$$

trong đó:

$$u_{eq} = -(B^T PB)^{-1} B^T PAx(t)$$

$$u_n = -(B^T PB)^{-1} (|B^T PB| \delta_f + \varepsilon_0) \text{sgn}(s), \quad \varepsilon_0 > 0$$

Hàm Lyapunov được chọn như sau (6).

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{s} &= B^T P\dot{x}(t) = B^T P(Ax(t) + B(u + f(t))) \\ &= B^T PAx(t) + B^T PBu + B^T PBf(t) \\ &= B^T PAx(t) + B^T PB \left( -(B^T PB)^{-1} B^T PAx(t) \right. \\ &\quad \left. - (B^T PB)^{-1} (|B^T PB| \delta_f + \varepsilon_0) \text{sgn}(s) \right) + B^T PBf(t) \\ &= -(|B^T PB| \delta_f + \varepsilon_0) \text{sgn}(s) + B^T PBf(t) \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có:

$$\dot{V} = s\dot{s} = -(|B^T PB| \delta_f + \varepsilon_0) |s| + B^T PBf(t) \leq -\varepsilon_0 |s| \quad (7)$$

Để xác định ma trận  $P$ , bộ điều khiển được thiết kế như (8).

$$u(t) = -Kx + v(t) \quad (8)$$

với  $v(t) = Kx + u_{eq} + u_n$ .

Tồn tại ma trận  $K$  sao cho  $\bar{A} = A - BK$  ổn định, dẫn đến biểu thức (9).

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + B(v + f(t)) \quad (9)$$

với  $K$  là ma trận có kích thước  $1 \times 4$ .

Hàm Lyapunov theo công thức (10).

$$V = x^T Px \quad (10)$$

Vì vậy, ta có:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P\dot{x} = 2x^T P(\bar{A}x(t) + B(v + f(t))) \\ &= 2x^T P\bar{A}x(t) + 2x^T PB(v + f(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

Khi  $t \geq t_0$ , tồn tại  $s = B^T Px(t) = 0$

hoặc  $s^T = x^T PB = 0$ , ta có được (12).

$$\dot{V} = 2x^T P\bar{A}x = x^T (P\bar{A} + \bar{A}^T P)x = 2x^T Mx \quad (12)$$

Để thỏa mãn  $\dot{V} < 0, M < 0$ , ta có (13).

$$P\bar{A} + \bar{A}^T P < 0 \quad (13)$$

Vì  $\bar{A}$  là Hurwitz nên  $P\bar{A} + \bar{A}^T P < 0$  sẽ đảm bảo thỏa mãn [12].

Nhân  $P^{-1}$  với bất đẳng thức (13) ta có được (14).

$$\bar{A}P^{-1} + P^{-1}\bar{A}^T < 0 \quad (14)$$

Cho  $X = P^{-1}$ , ta có được (15) và (16).

$$\bar{A}X + X\bar{A}^T < 0 \quad (15)$$

$$(A - BK)X + X(A - BK)^T < 0 \quad (16)$$

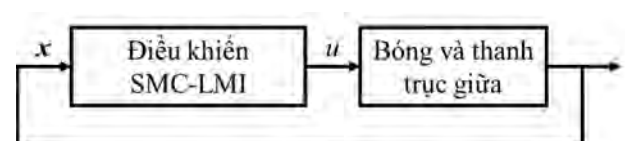
Với  $L = KX$ , ta có (17).

$$AX - BL + XA^T - L^T B^T < 0 \quad (17)$$

Trong bất đẳng thức ma trận tuyến tính, để đảm bảo  $P$  là ma trận đối xứng, ta thiết kế:

$$P = P^T \quad \text{hoặc} \quad X = X^T \quad (18)$$

Sơ đồ cấu trúc bộ điều khiển SMC-LMI cho hệ bóng và thanh trượt giữa được trình bày như Hình 2. Trong đó, nhiệm vụ chính của bộ điều khiển được đề xuất là cung cấp tín hiệu điều khiển  $u$  được tính toán dựa trên công thức(5) và  $x$  là tín hiệu hồi tiếp các biến trạng thái.



Hình 2. Sơ đồ điều khiển

Để thấy rõ khả năng điều khiển của bộ điều khiển được đề xuất, nhóm tác giả tiến hành mô phỏng điều khiển ổn vị trí quả bóng quanh vị trí cân bằng với các thông số vật lý như Bảng 1 và điều kiện ban đầu cho các biến trạng thái được chọn là  $x = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

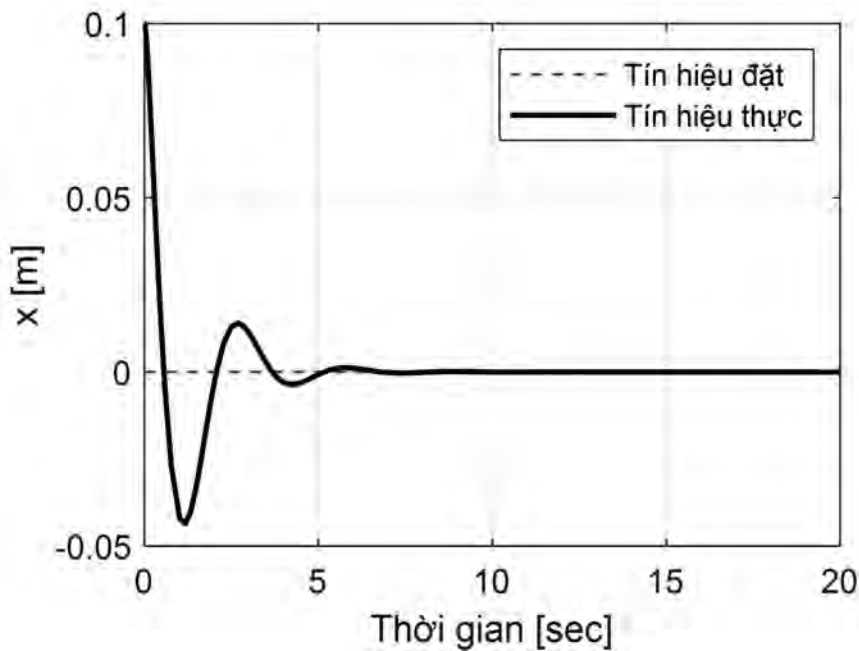
Luật điều khiển được thiết kế như công thức (5), chọn các giá trị  $\delta_f = 0.1$  và  $\varepsilon_0 = 0.5$ .

Dựa trên công thức (17) và (18) ta xác định được

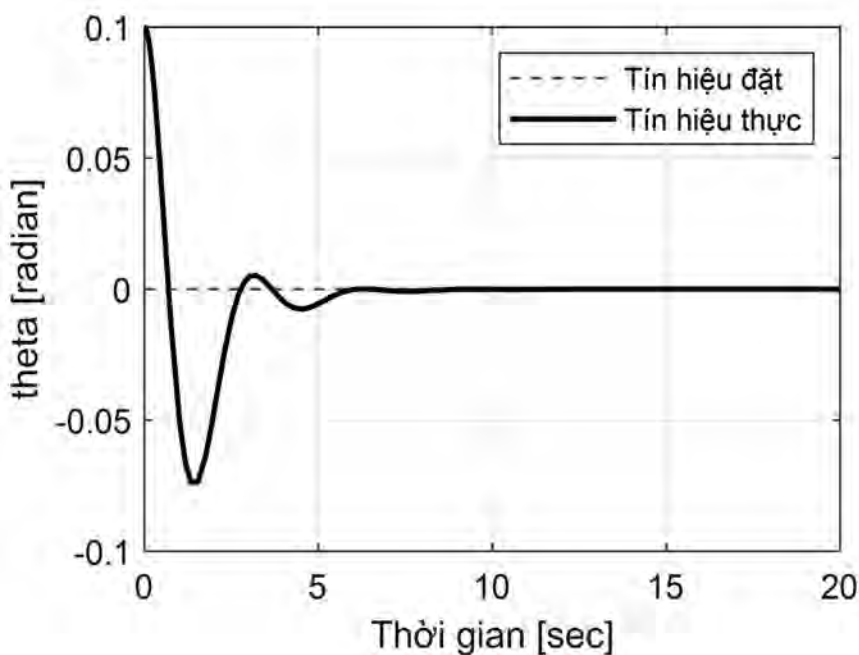
ma trận  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} 0.0047 & 0.0026 & -0.0085 & -0.0015 \\ 0.0026 & 0.0058 & -0.0095 & -0.0028 \\ -0.0085 & -0.0095 & 0.0472 & 0.0074 \\ -0.0015 & -0.0028 & 0.0074 & 0.0033 \end{bmatrix}$$

Hiệu quả của bộ điều khiển được thể hiện như Hình 3 và Hình 4, trong đó vị trí quả bóng từ vị trí ban đầu  $x = 0.1(m)$  đã tiến về 0 trong thời gian khoảng 7 giây và biên độ dao động lớn nhất của thanh so với phương ngang là  $-0.07(rad)$ .



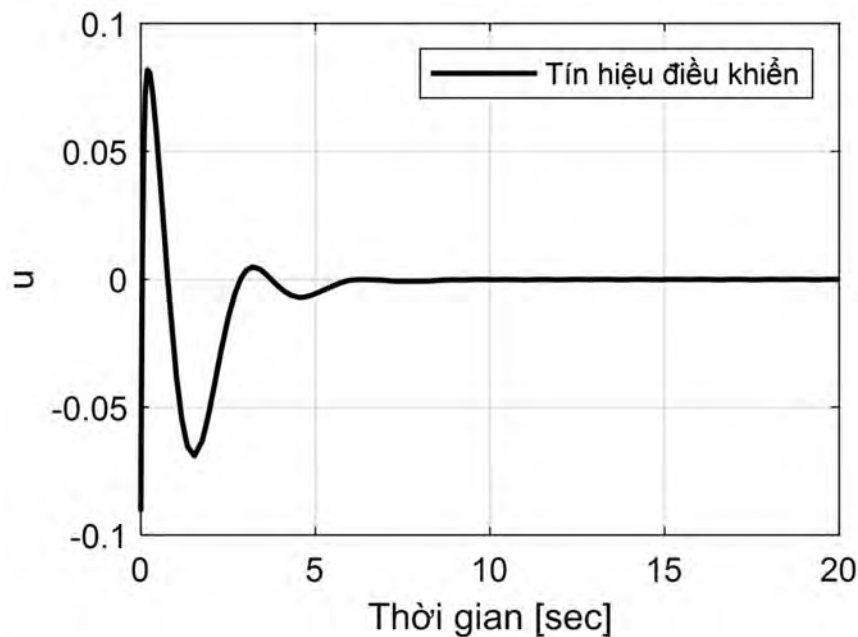
Hình 3. Đáp ứng vị trí quả bóng



Hình 4. Đáp ứng góc lệch của thanh

Tín hiệu điều khiển của bộ điều khiển SMC-LMI được thể hiện như Hình 5, kết quả cho thấy để đưa được quả bóng về vị trí cân bằng thì hệ

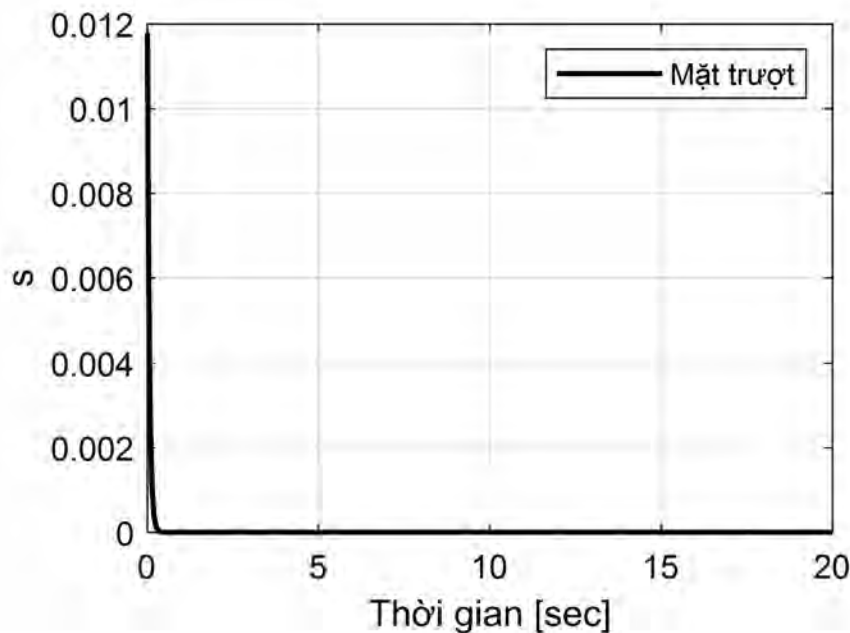
thống cần cung cấp một moment xoắn lớn nhất tác động lên tâm của thanh khoảng 0.09 ( $kg.m^2/s^2$ ).



Hình 5. Tín hiệu điều khiển

Kết quả Hình 6 cho thấy mặt trượt của bộ điều khiển được đề xuất đã dần hội tụ về 0 và không

xuất hiện tượng dao động với tần số cao quanh mặt trượt.



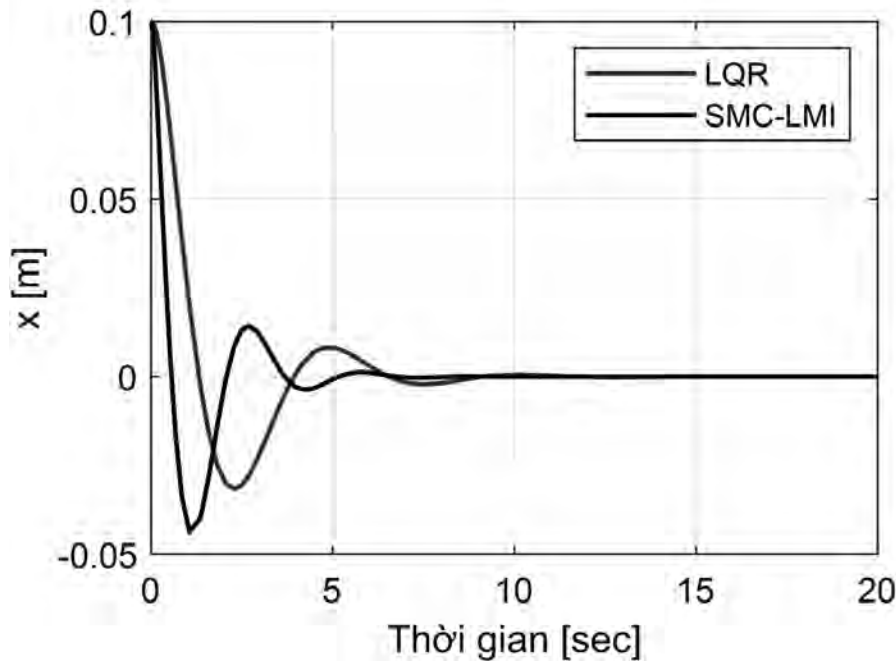
Hình 6. Mặt trượt

Để thấy được ưu điểm của bộ điều khiển được đề xuất, nhóm tác giả tiến hành so sánh bộ điều khiển được đề xuất với bộ điều khiển LQR áp dụng cho

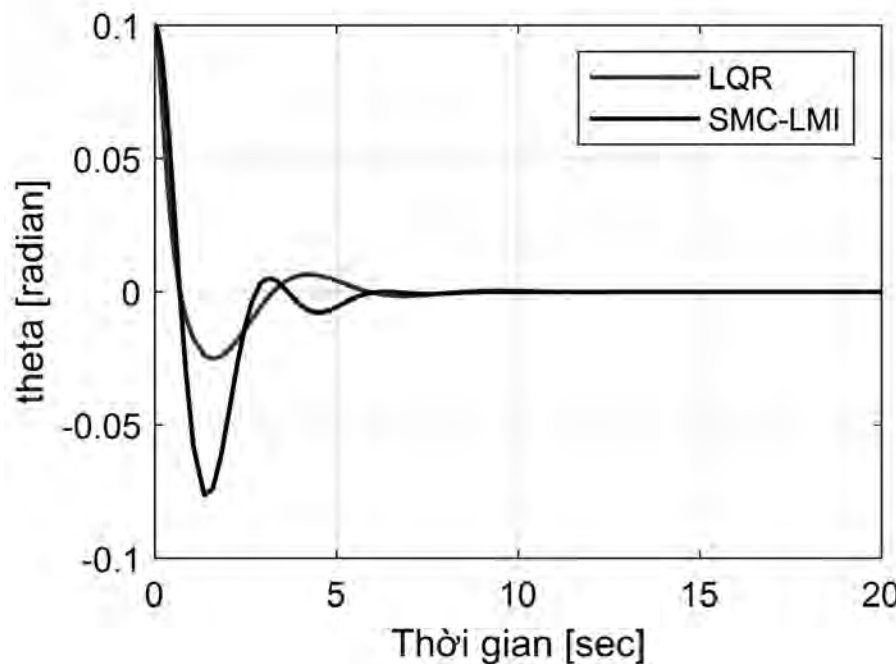
đối tượng bóng và thanh trục giữa, kết quả đáp ứng vị trí quả bóng và góc lệch của thanh được trình bày như Hình 7 và Hình 8, cho thấy thời gian

để quả bóng từ vị trí ban đầu tiến về 0 khi điều khiển SMC-LMI là khoảng 7 giây, trong khi đó bộ điều khiển LQR cần tới khoảng 11 giây để quả bóng

ổn định. Tuy nhiên, biên độ dao động của quả bóng và góc lệch của thanh cao hơn khi điều khiển SMC-LMI so với điều khiển LQR.



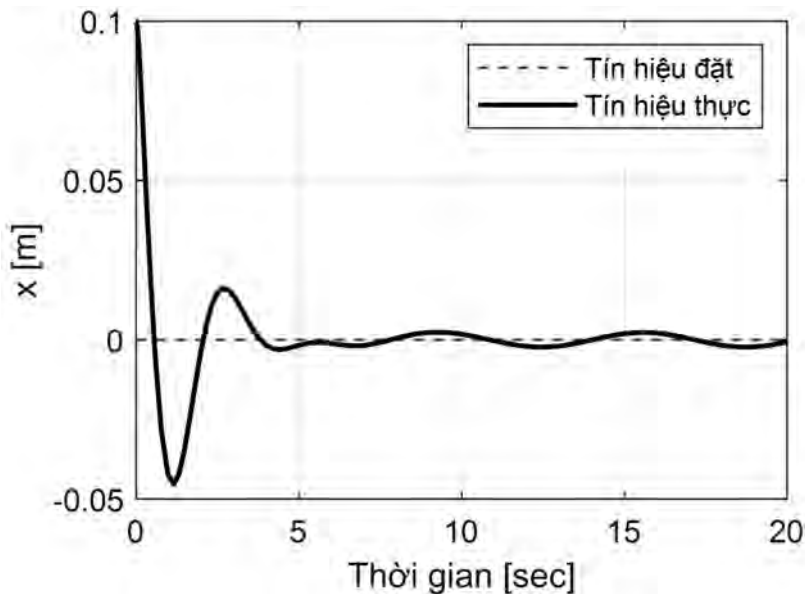
Hình 7. Đáp ứng vị trí quả bóng khi điều khiển LQR và SMC-LMI



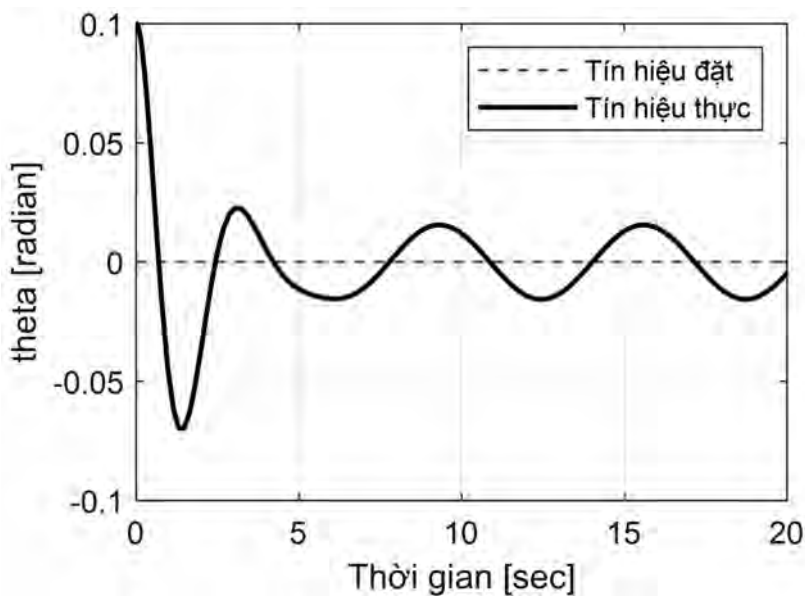
Hình 8. Đáp ứng góc lệch của thanh khi điều khiển LQR và SMC-LMI

Để kiểm tra sự ổn định và bền vững của bộ điều khiển dưới tác động của nhiễu, nhóm tác giả đã giả sử hệ thống chịu tác động bởi nhiễu  $f = 0.1\sin(t)$ . Kết quả mô phỏng được mô tả trên Hình 9 và Hình 10 cho thấy mặc dù có nhiễu tác động nhưng bộ

điều khiển vẫn có khả năng đưa vị trí quả bóng và góc lệch của thanh về gần vị trí cân bằng. Vị trí quả bóng dao động quanh vị trí cân bằng với biên độ khoảng  $0.003(m)$  và góc lệch của thanh dao động với biên độ khoảng  $0.02(rad)$  khi có nhiễu tác động.



Hình 9. Đáp ứng vị trí quả bóng khi có nhiễu



Hình 10. Đáp ứng góc lệch của thanh khi có nhiễu

#### 4. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, nhóm tác giả đã đề xuất một giải pháp là sử dụng bộ điều khiển trượt dựa trên bất đẳng thức ma trận tuyến tính để điều khiển ổn định hệ bóng và thanh, cụ thể là điều khiển ổn định quả bóng quanh vị trí cân bằng.

Các kết quả mô phỏng đã cho thấy hiệu quả của bộ điều khiển khi vị trí của quả bóng và góc lệch của

thanh dần ổn định quanh vị trí cân bằng sau thời gian khoảng 7 giây. Bên cạnh đó, hiệu quả của bộ điều khiển được đề xuất còn được kiểm chứng khi hệ thống bị nhiễu tác động. Ngoài ra, những kết quả mô phỏng đạt được trong nghiên cứu này còn là cơ sở để phát triển bộ điều khiển SMC-LMI cho các mô hình phức tạp như robot ba bánh đa hướng, robot delta, hệ cấu trúc trong tương lai.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. I. Isa, M. F. Hamza, A. Y. Zimit and J. K. Adamu, "Modelling and fuzzy control of ball and beam system," *In 2018 IEEE 7th International conference on adaptive science và Technology*

(ICAST), IEEE, 1-6, 2018.

[2] F. A. Salem, "Mechatronics Design of Ball and Beam System: Education and," *Control Theory Informatics*, 3(4), 1-27, 2013.

- [3] N. N. A. Quân, và H. D. Bình, “Thiết kế và đánh giá thực nghiệm bộ điều khiển PID ổn định hệ thống cân bằng bóng trên thanh,” *Tạp chí Khoa học và công nghệ Đại học Duy Tân*, 7(38), 65-73, 2020.
- [4] N. C. Ngôn, N. V. Thọ và T. T. H. Phượng, “Điều khiển giám sát hệ cầu cân bằng với thanh và bóng dùng mạng nơ-ron hàm cơ sở xuyên tâm,” *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 58(3), 26-35, 2022.
- [5] T. N. Đ. Khoa và cộng sự, “Điều khiển LQR cho hệ bóng thanh trục giữa,” *Tạp san Khoa học và kỹ thuật trường Đại học Bình Dương*, 6(3), 2023.
- [6] N. T. Diệm và Đ. X. Kiên, “Ổn định hệ thống bóng và thanh bằng phương pháp điều khiển Fuzzy-PID,” Trường Đại học Giao thông vận tải TP Hồ Chí Minh, 2014.
- [7] M. K. Gutierrez, D. M. Choi and H. Jula, “Using Genetic Algorithms to Optimize Control of a Ball-and-Beam System,” *In 2020 IEEE Green Energy and Smart Systems Conference (IGESSC)*, IEEE, 1-6, 2020.
- [8] H. Ali, A. Albagul and A. Algitta, “Optimization of PID parameters based on Particle Swarm optimization for ball and beam system,” *International Journal of Engineering technologies and Management research*, 5(9), 59-69, 2018.
- [9] B. Lawrence, “Tuning of a PID controller for optimal performance of ball and beam system,” *Int. J. Eng. Res*, 9(04), 1-5, 2020.
- [10] M. J. Mahmoodabadi and N. Danesh, “Gravitational search algorithm-based fuzzy control for a nonlinear ball and beam system,” *Journal of Control and Decision*, 5(3), 229-240, 2018.
- [11] Bolívar-Vincenty, G. Carlos, and G. Beauchamp-Báez, “Modeling the ball-and-beam system from newtonian mechanics and from lagrange methods,” *In Twelfth LACCEI Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology*, vol. 22, 2-4, 2014.
- [12] J. Liu and X. Wang, “Advanced sliding mode control for mechanical systems,” *Springer Berlin Heidelberg*, 82-83, 2011.
- [13] M. S. Phan, T. C. Do and V. Q. Truong, “Comparative Analysis of SMC-LMI and LQR Controllers for Double Inverted Pendulum,” *Measurement, Control, and Automation*, 4(3), 1-7, 2023.

## Sliding mode control based on linear matrix inequalities application for beam and ball system

Pho Hoang Linh and Huynh Minh Vu

### ABSTRACT

*This paper presents the application of a sliding controller built based on linear matrix inequality for the purpose of controlling the ball and beam system with middle axis, this system is often used as an object to verify algorithms in control engineering. Sliding mode control is a commonly used technique for stable control of highly unstable and nonlinear systems such as ball and beam systems. Controller design based on linear matrix inequality is very suitable for handling uncertain elements of the system, compared to other nonlinear control methods, this design method is more computationally efficient and simpler to implement. The simulation results show that the proposed controller has fast response, good balance, and meets control quality criteria. In addition, the controller is also verified when the system is affected by noise.*

**Keywords:** sliding mode control, inequalities, linear matrix, ball and beam

Received: 06/05/2024

Revised: 22/05/2024

Accepted for publication: 11/11/2024